

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 532.546

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета  
физического факультета  
методической комиссии физического факультета  
протокол № 7 от 7 мая 2010 года  
заседания кафедры радиоэлектроники  
протокол № 12 от 25 марта 2010 года*

*Авторы-составители*  
доктор физ.-мат. наук, доц. Г.Г. Куштанова,  
доктор физ.-мат. наук, проф. М.Н. Овчинников.

*Научный редактор*  
доктор физ. мат. наук, проф. С.Л. Царевский

*Рецензент*  
Зав. лаб. подземной гидродинамики ИММ КазНЦ РАН, д.т.н.,  
профессор, действительный член РАЕН Хайруллин М.Х.

Куштанова Г.Г., Овчинников М.Н.

Подземная гидромеханика  
(учебно-методическое пособие к курсу лекций «Подземная  
гидромеханика»)

Куштанова Г.Г. Подземная гидромеханика. Учебно-методическое  
пособие для магистрантов физического факультета по направлению  
«Радиофизические методы по областям применения»/ Г.Г. Куштанова ,  
М.Н.Овчинников.– Казань: Изд-во Казан.(Приволж.) федер. ун-та, 2010,  
67 с.

Аннотация:

Излагается гидродинамическая теория фильтрации жидкостей и газов в  
однородных и неоднородных пористых средах. Рассмотрены задачи  
стационарной и нестационарной фильтрации, основы расчета интерференции  
скважин, вопросы теории двухфазной фильтрации, особенности поведения  
вязкопластичных жидкостей. Пособие предназначено для магистрантов  
физического факультета по направлению «Радиофизические методы по  
областям применения», а также может быть использовано при чтении курсов  
на факультете повышения квалификации.

Казань 2010

<b>Оглавление</b>	стр.
Введение	4
1. Математические модели однофазной фильтрации	5
2. Одномерная установившаяся фильтрация несжимаемой жидкости и газа в пористой среде.	9
3. Аналогия между фильтрацией несжимаемой жидкости и газа.	14
4. Плоскорадиальный поток совершенного газа.	15
5. Плоскорадиальный фильтрационный поток несжимаемой жидкости и газа по двучленному закону фильтрации.	17
6. Плоскорадиальный поток в неоднородных пластах.	19
7. Виды несовершенства скважин. Скин-эффект.	24
8. Неустановившееся движение упругой жидкости и газа в упругом пласте.	28
9. Плоскорадиальный фильтрационный поток упругой жидкости.	31
10. Интерференция скважин в условиях упругого режима.	33
11. Определение коллекторских свойств пласта по данным исследования скважин при упругом режиме.	36
12. Метод последовательной смены стационарных состояний.	38
13. Плоскорадиальное вытеснение нефти водой.	40
14. Классификация неньютоновских жидкостей.	44
15. Математическая модель двухфазной фильтрации.	48
16. Прямолинейно-параллельное вытеснение.	52
17. Классическая задача Бакли-Левретта.	54
18. Определение фронтальной насыщенности.	63
19. Определение средней насыщенности в безводный период добычи.	64
20. Расчет коэффициента нефтеотдачи.	66
Литература	67

## Введение

Подземная гидромеханика – наука о движении жидкостей, газов и их смесей в пористых и трещиноватых горных породах. Изучая фильтрационные потоки, она служит теоретической основой разработки нефтяных, газовых и газоконденсатных месторождений.

Скопления нефти и газа связаны с вмещающими горными породами (пластами)- пористыми и проницаемыми образованиями, имеющими непроницаемые кровлю и подошву. Движение жидкостей и газов через пористые или трещиноватые среды называется фильтрацией.

Начало развитию подземной гидромеханики было положено французским инженером А. Дарси (1803-1858 гг.), который в процессе работы над проектом водоснабжения г. Дижона (Франция) провел многочисленные опыты по изучению фильтрации воды через вертикальные песчаные фильтры.

Выдающийся вклад в развитие теории фильтрации в нефтегазоводоносных пластах внесли советские ученые: Л.С. Лейбензон (1879-1951 гг.) – основатель советской школы ученых и специалистов, занимающихся развитием теории фильтрации применительно к проблемам разработки нефтяных и газовых месторождений, академик С.А. Христианович, профессора Б.Б. Лапук, И.А. Чарный, В.Н. Щелкачев.

Огромное значение для развития технологий нефтеотдачи сыграли работы по теории фильтрации крупнейшего американского специалиста М. Маскета и работы С. Бакли и М. Левретта по основам теории двухфазной фильтрации.

## 1. Математические модели однофазной фильтрации

В качестве наиболее часто используемого и разработанного метода описания физических процессов в подземной гидродинамике применяется макроскопический, в основе которого лежит гипотеза сплошности, законы и методы механики сплошной среды. В механике сплошных сред основными законами сохранения являются законы сохранения массы, импульса, момента импульса, энергии. Для описания специфических свойств сплошной среды, к законам сохранения добавляют определяющие уравнения и законы, например, закон Гука в теории упругости.

Математические модели изотермической однофазной фильтрации в изотропной пористой среде включают закон сохранения массы, закон сохранения импульса в виде закона фильтрации Дарси, определяющие уравнения в виде зависимости плотности, пористости, проницаемости, вязкости от давления [1], [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m\rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \bar{w} &= 0, \\ \bar{w} &= -\frac{k}{\mu} (\operatorname{grad} p + \rho \vec{f}), \\ \rho &= \rho(p), \quad m = m(p), \quad k = k(p), \quad \mu = \mu(p), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $p$  – давление,  $t$  – время,  $m$  – пористость,  $k$  – проницаемость,  $\rho$  – плотность,  $\mu$  – вязкость,  $f$  – вектор объемных (массовых) сил.

Модель однофазной фильтрации по закону Дарси в недеформируемом пласте:

$$\begin{aligned} \rho &= \text{const}, \quad m = \text{const}, \quad k = \text{const}, \quad \mu = \text{const}, \\ \operatorname{div} \bar{w} &= 0, \\ \bar{w} &= -\frac{k}{\mu} (\operatorname{grad} p + \rho \vec{f}). \end{aligned} \quad (2)$$

Подставим закон Дарси в уравнение неразрывности, в результате получим

$$\operatorname{div} \left( -\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} p \right) = -\frac{k}{\mu} \operatorname{div} \operatorname{grad} p = -\frac{k}{\mu} \Delta p = 0.$$

Следовательно, систему (2) в пренебрежении массовыми силами можно переписать в виде [3]

$$\begin{aligned} \Delta p &= 0, \\ \bar{w} &= -\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} p. \end{aligned} \quad (3)$$

Система уравнений (3) задает математическую модель фильтрации вязкой несжимаемой жидкости в недеформируемой изотропной пористой среде.

Математическая модель фильтрации вязкой сжимаемой жидкости в недеформируемой изотропной пористой среде без учета силы тяжести в общем виде определяется следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m\rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \bar{w} &= 0, \\ \bar{w} &= -\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} p, \\ \rho &= \rho(p). \end{aligned} \quad (4)$$

Подставим закон Дарси в уравнение неразрывности:

$$m \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \left( -\rho \frac{k}{\mu} \operatorname{grad} p \right) = m \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{k}{\mu} \operatorname{div} \rho \operatorname{grad} p = 0.$$

Введем функцию  $P$ , которая называется функцией Лейбензона:

$$grad P = \rho grad p.$$

Равенство  $P = \int \rho dp + const$  позволяет определить явный вид функции Лейбензона при заданном уравнении состояния  $\rho = \rho(p)$ .

После введения функции Лейбензона систему уравнений можно переписать в виде [3]

$$\begin{aligned} m \frac{\partial \rho}{\partial t} - \Delta P &= 0, \\ \bar{w} &= -\frac{k}{\mu} grad P, \\ P &= \int \rho dp + const, \\ \rho &= \rho(p). \end{aligned} \quad (5)$$

Если проницаемость и вязкость тоже предполагаются зависящими от давления, то используют обобщенную функцию Лейбензона:

$$P = \int \frac{k(p)}{\mu(p)} \rho(p) dp + const.$$

Уравнение состояния упругой слабосжимаемой жидкости при небольших перепадах давления обычно используют в виде

$$\rho = \rho_0 [1 + \beta_{ж} (p - p_0)],$$

где  $\beta_{ж}$  – коэффициент сжимаемости жидкости.

По данным В.Н. Щелкачева [4] для нефтей отечественных месторождений коэффициент сжимаемости лежит в диапазоне  $(7-30) \cdot 10^{-10}$  Па<sup>-1</sup>, пластовых вод  $(2.7-5) \cdot 10^{-10}$  Па<sup>-1</sup>.

Изменение пористости выражается соотношением

$$m = m_0 + \beta_c (p - p_0),$$

где  $\beta_c$  – коэффициент сжимаемости скелета пласта.

Для зернистых пористых сред коэффициент составляет  $(0.3-2) \cdot 10^{-10}$  Па<sup>-1</sup>.

Для природных газов в качестве уравнения состояния часто используют уравнение состояния совершенного газа (уравнение Менделеева -

Клапейрона)  $p = \rho RT$ , где  $R$  – газовая постоянная,  $T$  – температура в градусах Кельвина. Для изотермических процессов уравнение состояния

совершенного газа используют в виде  $p = \frac{\rho_{ат}}{\rho_{ам}} p$ .

Для газовых месторождений с большими пластовыми давлениями (порядка 40-60 МПа) используется уравнение состояния реального газа  $p = z \rho RT$ , где  $z$  – коэффициент сверхсжимаемости газа.

Чтобы получить решение системы уравнений, к ним необходимо добавить начальные и граничные условия.

Если в начальный момент пласт не возмущен, то начальное условие при  $t=0$  имеет вид  $p = p_0 = const$ .

Возможны следующие граничные условия.

1. На внешней границе  $\Gamma$ :
  - а. постоянное давление  $p(\Gamma, t) = p_K$ , т.е. граница является контуром питания;
  - б. постоянный переток через границу при выполнении закона Дарси

$$w_n = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n} = const, \quad \text{где } n \text{ – нормаль к границе } \Gamma;$$

- в. переменный переток через границу  $\frac{\partial p}{\partial n} = f(t)$ ;

d. замкнутая внешняя граница  $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ .

2. На внутренней границе (при плоскорадиальной фильтрации):

a. постоянное давление на забое скважины радиусом  $r_c$

$$p(r, t) = p_c \quad \text{при} \quad r = r_c;$$

b. переменное давление на забое скважины радиусом  $r_c$

$$p(r, t) = p_c(t) \quad \text{при} \quad r = r_c;$$

c. постоянный дебит при выполнении закона Дарси

$$Q = \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} 2\pi r h \quad \text{при} \quad r = r_c$$

или  $r \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{Q\mu}{2\pi r h k} 2\pi r h;$

d. переменный дебит  $r \frac{\partial p}{\partial r} = f(t)$  при  $r=r_c$ ;

e. отключение скважины  $r \frac{\partial p}{\partial r} = 0$  при  $r=r_c$ .

## 2. Одномерная установившаяся фильтрация несжимаемой жидкости и газа в пористой среде [5].

Пусть имеем в круговом пласте толщиной  $h$  и радиуса  $R_K$  центральную скважину радиуса  $r_c$ , на забое которой поддерживается постоянное давление. На боковой поверхности также поддерживается постоянное давление  $p_K$ , и через нее происходит приток флюида, равный дебиту скважины. Поэтому фильтрация установившаяся. При плоскорадиальной симметрии задачи система уравнений (2) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dp}{dr} \right) &= 0, \\ w &= -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dr}. \end{aligned} \tag{6}$$

Проинтегрируем первое уравнение  $r \frac{dp}{dr} = C$ , разделяя переменные,

получим  $dp = C \frac{dr}{r}$ . Проинтегрируем последнее выражение, будем иметь

$$\int_p^{p_K} dp = \int_{r_c}^{R_K} C \frac{dr}{r}. \quad \text{Используя граничное условие на контуре питания}$$

$$p=p_K, \text{ получим } p_K - p = C \ln \frac{R_K}{r}.$$

Можно проинтегрировать и с другим граничным условием  $p=p_c$  на  $r=r_c$ ,

тогда  $p - p_c = C \ln \frac{r}{r_c}$ . Оба выражения эквивалентны.

Чтобы найти константу  $C$ , умножим формулу для скорости фильтрации на площадь боковой поверхности цилиндра произвольного радиуса  $r$ :

$$2\pi r h w = 2\pi r h \frac{k}{\mu} \frac{dp}{dr} \quad \text{или} \quad Q = 2\pi r h \frac{k}{\mu} C. \quad \text{Из последнего соотношения}$$

следует  $C = \frac{Q\mu}{2\pi r h k}$ . Подставляя найденное значение постоянной

интегрирования, получим формулы для распределения давления в пласте

$$p = p_K - \frac{Q\mu}{2\pi hk} \ln \frac{R_K}{r} \quad \text{и} \quad p = p_c + \frac{Q\mu}{2\pi hk} \ln \frac{r}{r_c}, \text{ а также}$$

выражение для объемного дебита пласта (скважины)

$$Q = \frac{2\pi hk}{\mu} \frac{p_K - p_c}{\ln \frac{R_K}{r_c}}. \quad (7)$$

Равенство (7) называется формулой Дюпюи, по имени ее автора – французского инженера–гидравлика. С помощью формулы Дюпюи равенства для распределения давления можно преобразовать к виду

$$p = p_c + \frac{p_K - p_c}{\ln \frac{R_K}{r_c}} \ln \frac{r}{r_c} \quad \text{и} \quad p = p_K - \frac{p_K - p_c}{\ln \frac{R_K}{r_c}} \ln \frac{R_K}{r}. \quad (8)$$

Из формул (8) следует, что давление в пласте распределено по логарифмическому закону. Давление изменяется резко около скважины и незначительно у контура питания. Формулы (8) в пространстве определяют поверхности, которые созданы вращением образующей вокруг оси симметрии скважины. Поверхность, соответствующая распределению давления, носит название воронки депрессии.

Для прикладных исследований при определении характеристик пласта по методу установившихся отборов строится индикаторная линия, которая представляет собой график зависимости расхода от разности давлений на контуре питания и на забое скважины (депрессии). Уравнение индикаторной линии при плоскорадиальном потоке задается уравнением прямой

$$Q = \frac{2\pi hk}{\mu} \frac{p_K - p_c}{\ln \frac{R_K}{r_c}} = C \Delta p$$

с коэффициентом продуктивности

$$C = \frac{2\pi hk}{\mu} \frac{1}{\ln \frac{R_K}{r_c}}. \quad (9)$$

Угол наклона индикаторной линии показывает насколько изменяется дебит пласта при изменении депрессии на единицу.

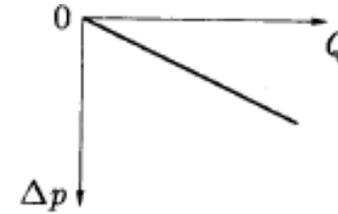


Рис. 1. Индикаторная линия для потока несжимаемой жидкости по закону Дарси.

Еще одна промысловая задача связана с определением времени движения в пласте «меченых частиц». С целью определения фильтрационных и емкостных параметров нефтегазового пласта в фильтрационный поток добавляют изотопы некоторых атомов и другие частицы, которые можно идентифицировать в потоке с помощью специальных методов [6]. Время движения «меченых частиц» определяется с помощью определения истинной средней скорости

$$\frac{dr}{dt} = v = \frac{w}{m} = \frac{Q}{2\pi r h m}. \quad (10)$$

Разделив переменные и проинтегрировав от 0 до произвольного момента времени  $t_1$  и от радиуса контура питания до  $r_1$ , получим

$$\int_0^{t_1} dt = \frac{2\pi h m}{Q} \int_{R_K}^{r_1} r dr, \quad \text{из которого следует } t_1 = \frac{\pi h m}{Q} (R_K^2 - r_1^2). \text{ Или,}$$

после использования формулы Дюпюи, найдем

$$t_1 = \frac{\mu m \ln(R_K / r_c)(R_K^2 - r_c^2)}{2k(p_K - p_c)}.$$

В частности, «меченая частица» пройдет от контура питания до

$$\text{скважины за время } T = \frac{\mu m \ln(R_K / r_c)(R_K^2 - r_c^2)}{2k(p_K - p_c)} \approx \frac{\mu m \ln(R_K / r_c)R_K^2}{2k(p_K - p_c)}.$$

Определим средневзвешенное по поровому пространству давление при плоскорадиальной фильтрации. Элемент объема в цилиндрических координатах запишется как  $dV = dz * d\varphi * r dr$ .

$$\tilde{p} = \frac{1}{V_{\Pi}} \int dV_{\Pi} = \frac{1}{\pi h m (R_K^2 - r_c^2)} \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_c}^{R_K} \left[ p_k - \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_K}{r_c}} \ln \frac{R_K}{r} \right] m r dr$$

$$\tilde{p} = \frac{1}{R_K^2 - r_c^2} \left( \int_{r_c}^{R_K} \left[ p_k - \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_K}{r_c}} \ln R_K \right] r dr + \int_{r_c}^{R_K} \left[ \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_K}{r_c}} r \ln r \right] dr \right).$$

$$\tilde{p} = p_k - \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_K}{r_c}} \ln R_K + \frac{2}{R_K^2 - r_c^2} \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_K}{r_c}} \left[ \frac{R_K^2}{2} \ln R_K - \frac{r_c^2}{2} \ln r_c - \frac{1}{4} (R_K^2 - r_c^2) \right]$$

$$\begin{aligned} \tilde{p} &= p_k - \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_K}{r_c}} \ln R_K + \\ &+ \frac{2}{R_K^2 - r_c^2} \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_K}{r_c}} \left[ \frac{R_K^2}{2} \ln R_K - \frac{r_c^2}{2} \ln R_K + \frac{r_c^2}{2} \ln R_K - \frac{r_c^2}{2} \ln r_c - \frac{1}{4} (R_K^2 - r_c^2) \right] = \\ &= p_k - \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_K}{r_c}} \ln R_K + \frac{2}{R_K^2 - r_c^2} \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_K}{r_c}} \frac{R_K^2 - r_c^2}{2} \ln R_K + \frac{2}{R_K^2 - r_c^2} \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_K}{r_c}} \frac{r_c^2}{2} \ln \frac{R_K}{r_c} - \\ &- \frac{2}{R_K^2 - r_c^2} \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_K}{r_c}} \frac{1}{4} (R_K^2 - r_c^2). \\ \tilde{p} &= p_k + \frac{r_c^2}{R_K^2 - r_c^2} (p_k - p_c) - \frac{p_k - p_c}{2 \ln \frac{R_K}{r_c}}. \end{aligned}$$

Поскольку  $R_K \gg r_c$ , то вторым слагаемым можно пренебречь и переписать выражение в виде

$$\tilde{p} = p_k - \frac{p_k - p_c}{2 \ln \frac{R_K}{r_c}}. \quad (11)$$

### 3. Аналогия между фильтрацией несжимаемой жидкости и газа.

Системы уравнений фильтрации несжимаемой жидкости и газа имеют следующий вид:

<i>для жидкости</i>	<i>для газа</i>
$\text{div } \vec{w} = 0$	$\text{div } \rho \vec{w} = 0$
$\vec{w} = -\frac{k}{\mu} \text{grad } p$	$\vec{w} = -\frac{k}{\mu} \text{grad } p$
$\rho = \text{const}$	$\rho = \rho(p)$

Перейдя к функции Лейбензона, получим

<p>для жидкости</p> $\operatorname{div} \vec{w} = 0$ $\vec{w} = -\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} p$ $\rho = \text{const}$	<p>для газа</p> $\Delta P = 0$ $\rho \vec{w} = -\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} P$ $P = \int \rho dp$ $\rho = \rho(p)$	(1)
---	--	-----

2)

Напомним, что уравнение состояния газа считается известным. Из сравнения двух первых уравнений в моделях видно, что они эквивалентны с точностью до замены давления  $p$  на функцию Лейбензона  $P$  и скорости фильтрации  $w$  на массовую скорость фильтрации  $\rho w$ . Таким образом, если геометрия пласта, начальные и граничные условия в постановке задач совпадают, то и решения совпадают. Если в полученных ранее решениях для одномерных фильтрационных течений несжимаемой жидкости произвести указанную замену функций, то полученные решения будут справедливы для фильтрации газа. Однако, чтобы получить явный вид выражений при фильтрации газа, необходимо задать уравнение состояния.

#### 4. Плоскорадиальный поток совершенного газа.

Используя аналогию между фильтрацией несжимаемой жидкости и газа, заменим давление на функцию Лейбензона, скорость фильтрации на массовую скорость фильтрации и объемный дебит на массовый. В результате получим

$$P = P_K - \frac{P_K - P_c}{\ln \frac{R_K}{r_c}} \ln \frac{R_K}{r}, \quad \rho w = \frac{Q_m}{2\pi k h} \frac{1}{r}, \quad Q_m = \frac{2\pi h k}{\mu} \frac{P_K - P_c}{\ln \frac{R_K}{r_c}}. \quad (13)$$

Заменяя в равенствах (10) функцию Лейбензона на ее представление для совершенного газа, будем иметь

$$p^2 = p_K^2 - \frac{p_K^2 - p_c^2}{\ln \frac{R_K}{r_c}} \ln \frac{R_K}{r}, \quad \rho w = \frac{Q_m}{2\pi k h} \frac{1}{r}, \quad (14)$$

$$Q_m = \frac{2\pi h k}{\mu} \frac{p_K^2 - p_c^2}{\ln \frac{R_K}{r_c}}.$$

Сравнение кривых распределения давления в пласте при установившейся фильтрации несжимаемой жидкости и газа показывает, что в газовом пласте давление изменяется медленнее вблизи контура питания и резче вблизи скважины. Для получения объемного дебита в атмосферных условиях массовый дебит делят на плотность газа в атмосферных условиях

$$Q_{am} = \frac{Q_m}{\rho_{am}} = \frac{2\pi h k}{\mu \rho_{am}} \frac{p_K^2 - p_c^2}{\ln \frac{R_K}{r_c}}.$$

Индикаторная линия для газовых скважин строится как график зависимости объемного дебита от величины  $p_K^2 - p_c^2$  (рис.2).

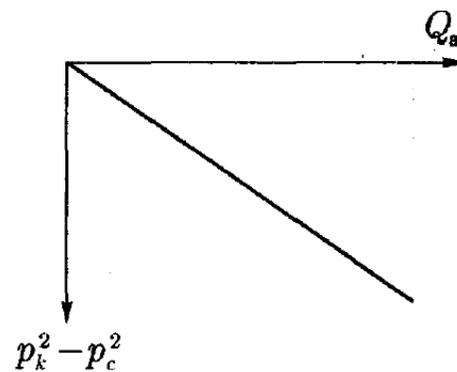


Рис. 2. Индикаторная кривая газовой скважины.

**5. Плоскорадиальный фильтрационный поток несжимаемой жидкости и газа по двучленному закону фильтрации.**

Математические модели фильтрации в этом случае имеют вид:

$$\begin{array}{ll} \text{для жидкости} & \text{для газа} \\ \operatorname{div} \vec{w}=0, & \operatorname{div} \rho \vec{w}=0, \\ \operatorname{grad} p = -\frac{\mu}{k} \vec{w} - \beta \frac{\rho}{\sqrt{k}} |\vec{w}| \vec{w}, & \operatorname{grad} p = -\frac{\mu}{k} \vec{w} - \beta \frac{\rho}{\sqrt{k}} |\vec{w}| \vec{w}, \\ \rho = \text{const}, & \rho = \rho(p), \end{array} \quad (15)$$

где  $\beta$  – константа пористой среды, определяемая экспериментально.

С помощью функции Лейбензона допускается установление аналогии между фильтрацией жидкости и газа и при нелинейном законе фильтрации.

$$\begin{array}{ll} \text{Для жидкости} & \text{Для газа} \\ \operatorname{div} \vec{w}=0 & \operatorname{div} \rho \vec{w}=0 \\ \operatorname{grad} p = -\frac{\mu}{k} \vec{w} - \beta \frac{\rho}{\sqrt{k}} |\vec{w}| \vec{w} & \operatorname{grad} P = -\frac{\mu}{k} \rho \vec{w} - \beta \frac{\rho}{\sqrt{k}} |\rho \vec{w}| \rho \vec{w} \\ \rho = \text{const} & \rho = \rho(p) \end{array} \quad (16)$$

Уравнение неразрывности для установившегося плоскорадиального потока приводит к постоянству массового расхода  $2\pi\rho w r h = Q_m = \text{const}$ .

$$\text{Из последнего соотношения можно выразить } \rho w = \frac{Q_m}{2\pi h r}.$$

Если подставить массовую скорость в закон фильтрации, проинтегрировать в пределах от радиуса контура питания до произвольной точки пласта, то получим

$$P = P_K - \frac{\mu}{k} \frac{Q_m}{2\pi h} \ln \frac{R_K}{r} - \frac{\beta}{\sqrt{k}} \left( \frac{Q_m}{2\pi h} \right)^2 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_K} \right) \quad (17)$$

$$\text{и } P_c = P_K - \frac{\mu}{k} \frac{Q_m}{2\pi h} \ln \frac{R_K}{r} - \frac{\beta}{\sqrt{k}} \left( \frac{Q_m}{2\pi h} \right)^2 \left( \frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_K} \right).$$

Так как  $r_c \ll R_K$ , то последним выражением в круглых скобках можно пренебречь.

Перейдем от функции Лейбензона к давлению по формулам:

$$P = \frac{\rho_{am} P^2}{2\rho_{am}} + C - \text{ для совершенного газа,}$$

$$P = \rho_0 p - \text{ для несжимаемой жидкости.}$$

Связь между депрессией и расходом для несжимаемой жидкости выражается соотношением

$$p_c = p_K - \frac{\mu}{k} \frac{Q}{2\pi h} \ln \frac{R_K}{r} - \frac{\beta}{\sqrt{k}} \left( \frac{Q}{2\pi h} \right)^2 \frac{1}{r_c}, \quad (18)$$

для совершенного газа –

$$p_c^2 = p_K^2 - \frac{\mu}{k} \frac{Q_{am} P_{am}}{\pi h} \ln \frac{R_K}{r} - \frac{\beta \rho_{am} P_{am}}{2\sqrt{k}} \left( \frac{Q_m}{\pi h} \right)^2 \frac{1}{r_c}. \quad (19)$$

Запишем эти уравнения в ином виде:

для несжимаемой жидкости

$$p_K - p_c = A Q + B Q^2, \quad (20)$$

для газа

$$p_K^2 - p_c^2 = A_1 Q_{am} + B_1 Q_{am}^2. \quad (21)$$

Из этих формул видно, что индикаторные линии, построенные в координатах  $Q, \Delta p$  и  $Q, \Delta p^2$  соответственно для жидкости и газа, являются

параболами. Здесь  $A, B, A_1, B_1$  – коэффициенты фильтрационных сопротивлений, постоянные для данной скважины.

Графики индикаторных диаграмм в координатах  $Q, (p_k - p_c)/Q$  и  $Q_{ам}, (p_k^2 - p_c^2)/Q_{ам}$ , соответственно, представляют собой прямые линии, для которых  $A(A_1)$  – отрезок, отсекаемый на оси ординат,  $B(B_1)$  – тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс.

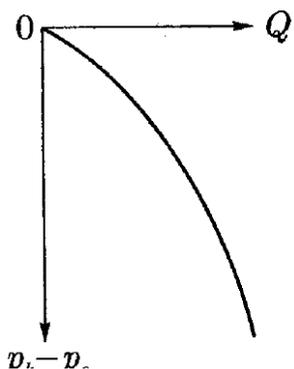


Рис.3. Индикаторная кривая при двучленном законе фильтрации.

## 6. Плоскорадиальный поток в неоднородных пластах [5].

**Слоисто-неоднородный пласт.** Пусть круглый горизонтальный пласт толщины  $h$  состоит из  $n$  пропластков толщиной  $h_i$  с проницаемостью  $k_i$  пористостью  $m_i, i=1,2,\dots,n$ .

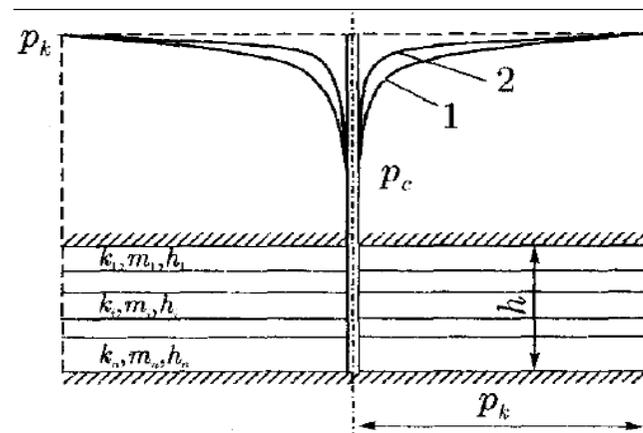


Рис. 4. Кривые распределения давления для жидкости (1) и для газа (2) при плоскорадиальном потоке в слоисто-неоднородном пласте.

В нем происходит установившийся приток к центральной скважине. На контуре питания  $R_K$  поддерживается постоянное давление  $p_k$ , а на скважине радиуса  $r_c$  - постоянное давление  $p_c$ . Тогда, при отсутствии перетоков между пропластками, в каждом из них имеем плоскорадиальный поток. При этом формула для распределения установившегося давления будет одинаковой для всех пропластков, а скорость фильтрации и дебит будут в каждом пропластке свои:

$$p(r) = p_K - \frac{p_K - p_c}{\ln \frac{R_K}{r}} \ln \frac{R_K}{r},$$

$$w_i = -\frac{k_i}{\mu} \frac{dp}{dr} = \frac{k_i}{\mu} \frac{p_K - p_c}{\ln \frac{R_K}{r}} \frac{1}{r}, \quad (22)$$

$$w_i S_i = Q_i = \frac{2\pi k_i h_i}{\mu} \frac{p_K - p_c}{\ln \frac{R_K}{r_c}}.$$

Дебит всего пласта определяется как сумма дебитов всех пропластков

$$\sum_{i=1}^n w_i S_i = \sum_{i=1}^n Q_i = \frac{2\pi}{\mu} \frac{p_K - p_c}{\ln \frac{R_K}{r_c}} \sum_{i=1}^n k_i h_i.$$

Среднее значение проницаемости пласта определяется из условия равенства дебитов слоисто-неоднородного и однородного пластов

$$\frac{2\pi k_{cp} h}{\mu} \frac{p_K - p_c}{\ln \frac{R_K}{r_c}} = \frac{2\pi}{\mu} \frac{p_K - p_c}{\ln \frac{R_K}{r_c}} \sum_{i=1}^n k_i h_i$$

и равно  $k_{cp} = \sum_{i=1}^n k_i h_i / h,$  (23)

где  $h = \sum_{i=1}^n h_i$  - толщина всего пласта.

Формулы для средней проницаемости в слоисто-неоднородном пласте оказываются одинаковыми и при радиальной и при прямолинейно-параллельной фильтрации.

**Зонально-неоднородный пласт.** Пусть имеется круглый горизонтальный пласт толщины  $h$ , состоящий из  $n$  кольцеобразных зон с различной проницаемостью  $k_i$  пористостью  $m_i, i=1,2,\dots,n$ . Граница каждой зоны имеет форму боковой поверхности цилиндра, соосного скважине. На контуре питания  $R_K$  поддерживается постоянное давление  $p_K$ , а на забое скважины – постоянное давление  $p_c$ .

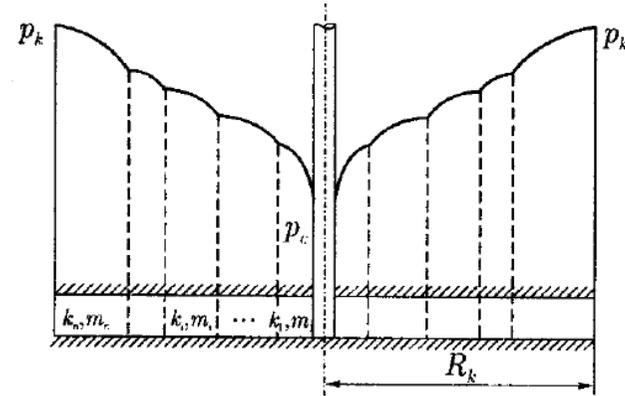


Рис. 5. Кривые распределения давления при плоскорадиальном потоке в кусочно-неоднородном пласте.

В каждой из зон имеется плоскорадиальный установившийся поток, и применимы те же формулы, что и в случае однородного пласта. В качестве давления на контуре питания и на скважине принимаются соответственно, давления на внешней и внутренней границах зон. Для  $i$ -ой зоны имеем

$$\begin{aligned}
p_i(r) &= p_{i+1} - \frac{p_{i+1} - p_i}{\ln \frac{r_{i+1}}{r_i}} \ln \frac{r_{i+1}}{r}, \\
w_i &= -\frac{k_i}{\mu} \frac{dp}{dr} = \frac{k_i}{\mu} \frac{p_{i+1} - p_i}{\ln \frac{r_{i+1}}{r_i}} \frac{1}{r}, \\
w_i S_i &= Q = \frac{2\pi k_i h}{\mu} \frac{p_{i+1} - p_i}{\ln \frac{r_{i+1}}{r_i}}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Поскольку сколько втекает в пласт через контур питания, столько и вытекает через скважину, столько же протекает через каждую цилиндрическую границу зон, объемный дебит в каждой зоне будет один и тот же. Сечение пласта на каждом расстоянии от скважины  $r$  будет меняться, поэтому скорость фильтрации будет зависеть от  $r$ .

Распишем более подробно

$$\begin{aligned}
p_K - p_n &= \frac{Q\mu}{2\pi k_n h} \ln \frac{R_K}{r_n}, \\
p_n - p_{n-1} &= \frac{Q\mu}{2\pi k_{n-1} h} \ln \frac{r_n}{r_{n-1}}, \\
&\dots \\
p_2 - p_c &= \frac{Q\mu}{2\pi k_1 h} \ln \frac{r_2}{r_c},
\end{aligned}$$

где  $R_K = r_{n+1}$ ,  $a$   $r_c = r_l$ . Сложив все равенства, получим

$$p_K - p_c = \frac{Q\mu}{2\pi h} \sum_{i=1}^n \left( \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} \right) / k_i, \text{ из которого следует}$$

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{2\pi h}{\mu} \frac{p_K - p_c}{\sum_{i=1}^n \left( \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} \right) / k_i} = \frac{2\pi h k_{cp}}{\mu} \frac{p_K - p_c}{\ln \frac{R_K}{r_c}}, \text{ откуда} \\
k_{cp} &= \ln \frac{R_K}{r_c} / \sum_{i=1}^n \left( \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} \right) / k_i.
\end{aligned} \tag{25}$$

## 7. Виды несовершенства скважин. Скин-эффект.

Скважина называется гидродинамически совершенной, если она вскрывает продуктивный пласт на всю толщину и забой скважины открыт, т.е. вся поверхность забоя является фильтрующей. На практике вблизи скважины имеется небольшая область – призабойная зона, в которой происходит дополнительное падение давления. В этом случае можно записать

$$p - p_c = \frac{Q\mu}{2\pi h k} \left( \ln \frac{r}{r_c} + s \right). \tag{26}$$

Здесь  $s$  – скин-эффект – безразмерный параметр, который определяет дополнительное фильтрационное сопротивление, вызывающее падение давления в призабойной зоне. В выражении (26)  $p_c$  – не идеальное, а реальное забойное давление.

Если скважина с открытым забоем вскрывает пласт не на всю толщину, ее называют гидродинамически несовершенной по степени вскрытия.

Если скважина вскрывает пласт до подошвы, но сообщение с пластом происходит только через специальные отверстия в обсадной колонне или фильтры, то ее называют гидродинамически несовершенной по характеру вскрытия.

Нередко встречаются скважины с двойным видом несовершенства. Степень и характер вскрытия определяют фильтрационные сопротивления в призабойной зоне и, в конечном итоге, производительность скважины.

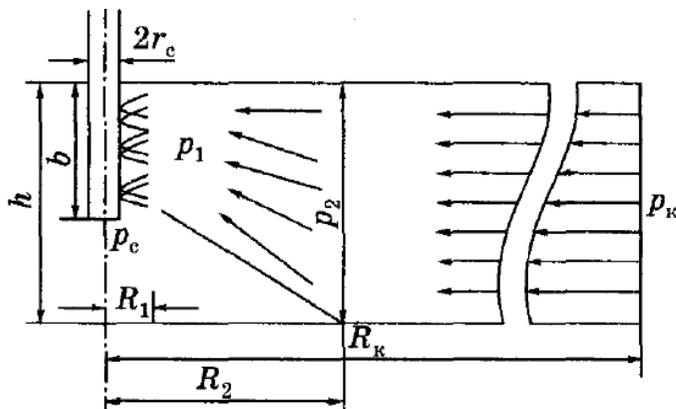


Рис. 6. Схема притока к несовершенным скважинам.

Другой причиной возникновения скин-эффекта являются фильтрационные характеристики призабойной зоны, зачастую существенно отличающиеся от свойств пласта. Загрязнение прискважинной области формируется на протяжении всей жизни скважины – при бурении, цементировании, перфорации, освоении и эксплуатации.

В процессе бурения скважины в пласт внедряется промывочная жидкость, представляющая собой полидисперсную систему, дисперсной фазой которой является глина и частицы выбуренных пород. Дисперсная фаза промывочной жидкости, оставшаяся на стенке скважины (рис.7), образует глинистую корку 2, а проникшая в прискважинную зону – зону коагуляции 3. В процессе вытеснения нефти фильтратом в пласте образуется промытая зона 4 и зона внедрения фильтрата – зона проникновения 5. Наиболее крупные частицы задерживаются на стенке, образуя глинистую корку, а проникшие в пласт, механически задерживаются в местах сужений поровых каналов и на стенках, формируя коагулирующую среду. Глубина проникновения коагулянта достигает 20-40 см и более. Проницаемость в зоне коагуляции снижается в среднем на

40%, но может достигать и 100%. Глубина проникновения фильтрата достигает 5 м и более. После обсадки скважины призабойная зона стремится к первоначальному состоянию, промытая зона и зона проникновения практически расформируются, но восстановления природного равновесия не происходит, возникают необратимые изменения, в том числе фазовых проницаемостей.

В процессе эксплуатации добывающей скважины происходит загрязнение призабойной зоны мельчайшими частицами глины и породы, выносимыми фильтрующимися жидкостями, может происходить выпадение асфальтенов и солей.

Кроме указанных факторов на величину скин-эффекта оказывают влияние и многие другие факторы, которые определяются изменением фазового состава, скоростей фильтрации и называются псевдоскин-факторами. Итоговый скин-эффект является суммой

$$s = s_{\text{степени}} + s_{\text{харак}} + s_{\text{пз}} + \sum s_{\text{псевдо}}.$$

Иногда для удобства вводят понятие приведенного радиуса скважины, т.е. радиуса такой совершенной скважины, дебит которой равен дебиту данной несовершенной скважины:  $r_c' = r_c \exp(-s)$  (27).

Схематично выделение призабойной зоны в отдельную область фильтрации представлено на рис 8. В предположении несжимаемости флюида можно записать следующие соотношения:

$$Q = \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{r_k}{r_c} + s} = \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{p_k - p_{пз}}{\ln \frac{r_k}{r_{пз}}} = \frac{2\pi k_{пз} h}{\mu} \frac{p_{пз} - p_c}{\ln \frac{r_{пз}}{r_c}}.$$

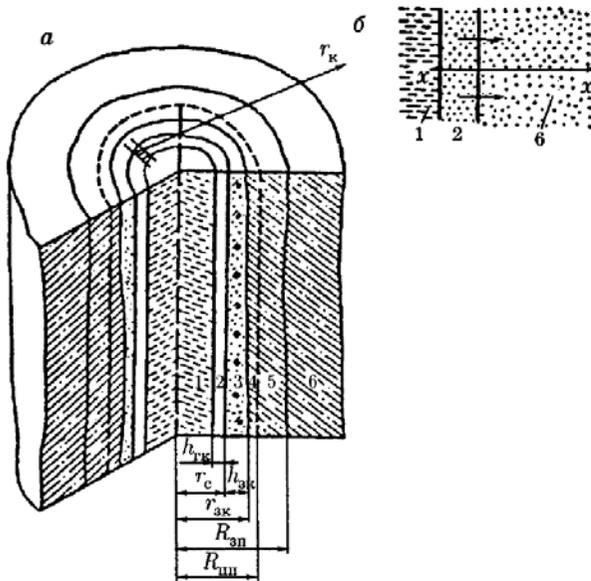


Рис.7. Схема загрязнения призабойной зоны скважины

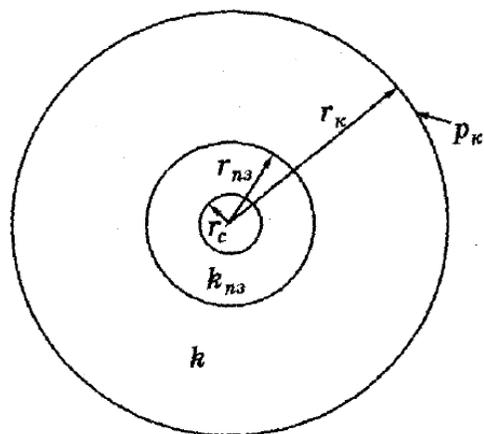


Рис.8. Скважина с концентричной призабойной зоной в центре кругового пласта

$$\text{Откуда можно найти } s = \left( \frac{k}{k_{пз}} - 1 \right) \ln \frac{r_{пз}}{r_c} \quad (28).$$

Если  $k_{пз} < k$ , то  $s > 0$  - призабойная зона загрязнена. Если  $k_{пз} > k$ , то  $s < 0$  - призабойная зона имеет улучшенные свойства по сравнению с пластом. Скорее всего, были применены кислотные обработки призабойной зоны скважины.

#### 8. Неустановившееся движение упругой жидкости и газа в упругом пласте.

Для неустановившихся процессов характерно перераспределение пластового давления, изменение во времени скоростей фильтрации, дебитов скважин и т.п. Количественные характеристики неустановившихся процессов зависят от упругих свойств пластов и насыщающих их жидкостей. Основной формой пластовой энергии, обеспечивающей приток жидкости к скважинам на рассматриваемых режимах, является энергия упругой деформации жидкостей и твердого скелета пласта.

При пуске скважины в эксплуатацию в условиях упругого режима движение жидкости начинается за счет использования потенциальной энергии упругой деформации пласта и жидкости сначала в окрестности забоя, затем и в более удаленных областях. При снижении пластового давления упругое противодействие пласта вышележащему горному массиву уменьшается, это приводит к уменьшению объема порового пространства, что в свою очередь увеличивает сжатие жидкости. Несмотря на то, что коэффициенты объемной упругой деформации жидкости и скелета пласта очень малы, но зато велики объемы пласта, объемы жидкости, извлекаемой за счет упругости, могут быть весьма значительны.

В некоторых случаях приток жидкости к скважинам поддерживается и напором воды, поступающей в пласт из области питания или специально нагнетаемой в пласт через нагнетательные скважины в случае разработки месторождения способом заводнения.

Математическая модель неустановившейся фильтрации упругого флюида, подчиняющегося закону Дарси, в деформируемой пористой среде имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial m\rho}{\partial t} - \Delta P &= 0, \\ \rho \vec{w} &= -gradP, \\ \rho &= \rho_0 [1 + \beta_{ж}(p - p_0)], \\ m &= m_0 + \beta_c(p - p_0), \\ k &= const, \quad \mu = const, \quad P = \frac{k}{\mu} \int \rho dp. \end{aligned} \quad (29)$$

Подставив в первое уравнение функцию Лейбензона, получим

$$\frac{\partial m\rho}{\partial t} - \frac{k}{\mu} \Delta \int \rho dp = 0.$$

Вычислим произведение

$$\rho m = \rho_0 m_0 + \rho_0 m_0 \beta_{ж}(p - p_0) + \rho_0 \beta_{ж} \beta_c (p - p_0)^2.$$

Последним слагаемым ввиду его малости по сравнению с другими слагаемыми, можно пренебречь, тогда

$$\rho m = \rho_0 m_0 [1 + \beta^*(p - p_0)/m_0].$$

Откуда после дифференцирования по времени  $t$  находим

$$\frac{\partial \rho m}{\partial t} = \rho_0 \beta^* \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Преобразуем правую часть равенства

$$\frac{k}{\mu} \Delta \int \rho dp = \frac{k}{\mu} \Delta \left( \rho_0 p + \rho_0 \beta_{ж} \left( \frac{p^2}{2} - p_0 p \right) + C \right).$$

Снова учитывая, что жидкость слабосжимаемая и коэффициент  $\beta_{ж}$  мал, пренебрежем вторым слагаемым и в результате получим

$$\frac{k}{\mu} \Delta \int \rho dp = \frac{k}{\mu} \rho_0 \Delta p.$$

Подставив в исходное уравнение, получим дифференциальное уравнение относительно давления:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \Delta p, \quad \kappa = \frac{k}{\mu \beta^*}. \quad (30)$$

Уравнение (30) – основное уравнение теории упругого режима фильтрации. По предложению Н.В.Щелкачева [6] оно названо уравнением пьезопроводности. Оно относится к уравнениям типа теплопроводности. Коэффициент  $\kappa$ , характеризующий скорость перераспределения пластового давления при неустановившейся фильтрации упругой жидкости в упругой пористой среде, Н.В.Щелкачев назвал коэффициентом пьезопроводности.

Размерность коэффициента пьезопроводности:  $[\kappa] = \frac{L^2}{T}$ . Наиболее часто встречающиеся значения коэффициента пьезопроводности заключены в пределах 0.1-5 м<sup>2</sup>/с.

Отметим, что уравнение пьезопроводности применимо только для слабосжимаемой жидкости, для которой  $\beta_{ж}(p - p_0) \ll 1$ .

### 9. Плоскорадиальный фильтрационный поток упругой жидкости.

Пусть в неограниченном горизонтальном пласте постоянной толщины  $h$  имеется добывающая скважина нулевого радиуса (точечный сток).

Начальное пластовое давление во всем пласте одинаково и равно  $p_k$ . В момент времени  $t=0$  скважина пущена в эксплуатацию с постоянным объемным дебитом  $Q_0$ . Распределение давления в пласте определяется интегрированием уравнения, которое в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \left( \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \right). \quad (31)$$

Начальные и граничные условия задачи следующие:

$$\begin{aligned} p(r, t) &= p_k \quad \text{при} \quad t = 0; \\ p(r, t) &= p_k \quad \text{при} \quad t > 0, r \rightarrow \infty; \\ Q &= \frac{2\pi kh}{\mu} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = Q_0 = \text{const} \quad \text{при} \quad t > 0, r = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Последнее условие перепишем в виде

$$\left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=0} = \frac{Q_0 \mu}{2\pi kh}.$$

Используя анализ размерностей, можно показать, что задача автомодельна, т.е. из аргументов, от которых зависит давление, можно составить один безразмерный комплекс  $\xi = \frac{r}{2\sqrt{\kappa t}}$ , от которого будет зависеть искомая функция  $p(r, t)$ . Произведем замену переменных  $p = P/p_k$  и получим обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2 P}{dt^2} + \left( \frac{1}{\xi} + 2\xi \right) \frac{dP}{dt} = 0,$$

которое нужно проинтегрировать при условиях, полученных из (32) преобразованием к безразмерному виду:

$$\begin{aligned} P(\xi) &= 1 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \infty; \\ \left( \xi \frac{\partial P}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} &= \frac{Q_0 \mu}{2\pi kh p_k}. \end{aligned}$$

Воспользуемся подстановкой  $\frac{dP}{d\xi} = v$ , тогда будем иметь

$$\frac{dv}{dt} + \left( \frac{1}{\xi} + 2\xi \right) v = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d\xi}{\xi} + \frac{dv}{v} = -2\xi d\xi.$$

Проинтегрировав, получим  $\ln \xi + \ln v = -\xi^2 + \ln C$ , где  $C$  – постоянная интегрирования. Потенцируя, найдем  $v = \frac{dP}{d\xi} = C \frac{\exp(-\xi^2)}{\xi}$ . Разделим

переменные и проинтегрируем  $\int_P^1 dP = \int_{\xi}^{\infty} C \frac{\exp(-\xi^2)}{\xi} d\xi$ . Учитывая первое

из условий в безразмерном виде, получим  $P(\xi) = -\int_{\xi}^{\infty} C \frac{\exp(-\xi^2)}{\xi} d\xi + 1$ .

Используя второе условие, найдем  $P(\xi) = -\frac{Q_0 \mu}{2\pi kh p_k} \int_{\xi}^{\infty} \frac{\exp(-\xi^2)}{\xi} d\xi + 1$ .

Интеграл в последней формуле сводится к табличному следующей

подстановкой:  $u = \xi^2 = \frac{r^2}{4\kappa t}$ . Перейдем к размерным величинам

$$p(r, t) = p_k - \frac{Q_0 \mu}{4\pi kh} \int_{\frac{r^2}{4\kappa t}}^{\infty} \frac{\exp(-u)}{u} du.$$

Интеграл в последней формуле называется интегральной показательной функцией и обозначается

$$-Ei\left(-\frac{r^2}{4\kappa t}\right) = \int_{\frac{r^2}{4\kappa t}}^{\infty} \frac{\exp(-u)}{u} du.$$

Следовательно, в любой точке плоскорадиального потока давление определяется по формуле

$$p(r, t) = p_k - \frac{Q_0 \mu}{4\pi k h} \left[ -Ei\left(-\frac{r^2}{4\kappa t}\right) \right], \quad (33)$$

которая носит название *основной формулы* теории упругого режима фильтрации.

Интегральную показательную функцию можно представить в виде ряда

$$-Ei(-x) = \ln \frac{1}{x} - \gamma + \sum \frac{(-1)^{n+1}}{nn!} x^n$$

Указанный ряд сходится при всех значениях  $x$ ,  $\gamma=0.5772$ - постоянная Эйлера.

При малых значениях  $x$  суммой ряда можно пренебречь, тогда

$-Ei(-x) = \ln \frac{1}{x} - 0.5772$ . При этом погрешность не превосходит 0.25%, если  $x \leq 0.01$ ; 5.7%, если  $x \leq 0.1$ .

### 10. Интерференция скважин в условиях упругого режима [6].

Поскольку дифференциальное уравнение упругого режима является линейным, то к его решению приложим метод суперпозиции. Суть метода состоит в том, что при совместной работе в пласте нескольких добывающих и нагнетательных скважин, изменение пластового давления, вызванное работой каждой из скважин, подсчитывается так, как если бы скважина работала одна; затем изменения давления, вызванные работой каждой скважины, алгебраически суммируются по всем скважинам. При этом

скорости фильтрации в любой точке пласта, вызванные работой каждой скважины, суммируются геометрически (как вектора).

Рассмотрим несколько примеров использования метода суперпозиции при интерференции скважин.

Пример 1. Пусть в бесконечном пласте работают одновременно  $n$  скважин с постоянными дебитами. Начальное пластовое давление всюду одинаково и равно  $p_k$ . Требуется найти снижение давления в любой точке пласта  $M$  в любой момент времени. На основе метода суперпозиции снижение пластового давления будет равно сумме снижений давления в этой точке, вызванных независимой работой каждой скважины, т.е.

$$\Delta p = p_k - p(r, t) = n \sum_{i=1} \Delta p_i.$$

Снижение давления в точке  $M$  при работе  $i$ -ой скважины по основной формуле составит:

$$\Delta p_i = \frac{Q_i \mu}{4\pi k h} \left[ -Ei\left(-\frac{r_i^2}{4\kappa t}\right) \right].$$

Следовательно, при работе всех скважин снижение давления в точке  $M$  равно:

$$\Delta p = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i \mu}{4\pi k h} \left[ -Ei\left(-\frac{r_i^2}{4\kappa_i t}\right) \right] = \frac{\mu}{4\pi k h} \sum_{i=1}^n Q_i \left[ -Ei\left(-\frac{r_i^2}{4\kappa_i t}\right) \right], \quad (34)$$

где  $Q_i$  – дебит  $i$ -ой скважины (при этом дебит добывающей скважины считается положительным, а нагнетательной - отрицательным),  $r_i$  - расстояние от центра  $i$ -ой скважины до точки  $M$ , где определяется изменение пластового давления,  $t_i$  - время с начала работы  $i$ -ой скважины до момента времени  $t$ , в который определяется изменение давления.

Пример 2. Пусть в некоторый момент времени ( $t=0$ ), принимаемый за начальный, в невозмущенном пласте с давлением  $p_k$  пущена в эксплуатацию

скважина с постоянным дебитом и через некоторый промежуток времени  $t_1$  остановлена. Под ее остановкой подразумевается мгновенное прекращение притока жидкости к забою скважины. Требуется определить давление в любой точке пласта в любой момент времени.

До момента времени  $t_1$  скважина работала одна, следовательно, пластовое давление в любой точке пласта определяется по формуле

$$p(r, t) = p_k - \frac{Q\mu}{4\pi kh} \left[ -Ei\left(-\frac{r^2}{4\kappa t}\right) \right].$$

Начиная с момента времени  $t_1$  (скважина уже остановлена), следуя методу суперпозиции, мысленно допустим, что вместе с продолжающей работать добывающей скважиной в той же точке начала работать нагнетательная скважина с таким же расходом  $Q$ . Следовательно, с момента времени  $t_1$  в пласт в одной и той же точке закачивается столько же жидкости, сколько и отбирается, значит, суммарный отбор из пласта оказывается равным нулю, что свидетельствует об остановке скважины. В любой момент после остановки скважины изменение давления определяется совместной работой этих двух (одна из которых фиктивная) скважин. По методу суперпозиции изменение давления в любой точке пласта равно

$$\begin{aligned} \Delta p(r, t) &= \Delta p_1 + \Delta p_2 = \frac{Q\mu}{4\pi kh} \left[ -Ei\left(-\frac{r^2}{4\kappa t}\right) \right] - \frac{Q\mu}{4\pi kh} \left[ -Ei\left(-\frac{r^2}{4\kappa(t-t_1)}\right) \right] = \\ &= \frac{Q\mu}{4\pi kh} \left\{ \left[ -Ei\left(-\frac{r^2}{4\kappa t}\right) \right] - \left[ -Ei\left(-\frac{r^2}{4\kappa(t-t_1)}\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Пример 3. Пусть сохраняются условия примера 2, только добывающая скважина не останавливается, а ее дебит изменяется от  $Q$  до  $Q_1$ . Изменение давления будет равно

$$\Delta p(r, t) = \frac{Q\mu}{4\pi kh} \left[ -Ei\left(-\frac{r^2}{4\kappa t}\right) \right] + \frac{-(Q-Q_1)\mu}{4\pi kh} \left[ -Ei\left(-\frac{r^2}{4\kappa(t-t_1)}\right) \right]. \quad (36)$$

## 11. Определение коллекторских свойств пласта по данным исследования скважин при упругом режиме.

Методы исследования пластов и скважин, основанные на изучении неустановившихся процессов изменения забойного давления в скважине, тесно связаны с теорией упругого режима.

На основании основной формулы теории упругого режима можно получить изменение забойного давления с момента пуска скважины в эксплуатацию с постоянным дебитом. Решение для изменения давления может быть записано как [7]:

$$\begin{aligned} \Delta p_c &= p_k - p_c = \frac{Q\mu}{4\pi kh} \left[ -Ei\left(-\frac{r_c'^2}{4\kappa t}\right) \right] = \\ &= \frac{Q\mu}{4\pi kh} \left[ \ln \frac{4\kappa t}{r_c'^2} - 0.5772 \right] = \frac{Q\mu}{4\pi kh} \left[ \ln \frac{4\kappa t}{r_c'^2} - \ln 1.781 \right] = \\ &= \frac{Q\mu}{4\pi kh} \left[ 2.31 \lg \frac{4\kappa t}{1.781 r_c'^2} \right] = 0.1832 \frac{Q\mu}{kh} \lg \frac{2.246\kappa t}{r_c'^2}. \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь  $r_c'$  - приведенный радиус скважины, определяемый формулой (27).

Последнее выражение можно переписать в виде

$$\Delta p_c = 0.1832 \frac{Q\mu}{kh} \lg \frac{2.246\kappa t}{r_c'^2} + 0.1832 \frac{Q\mu}{kh} \lg t,$$

$$\text{или } \Delta p_c = A + i \lg t, \text{ где } A = i \lg \frac{2.246\kappa}{r_c'^2}; \quad i = 0.1832 \frac{Q\mu}{kh}. \quad (38)$$

График изменения давления после пуска скважины в эксплуатацию с постоянным дебитом называется кривой падения давления (КПД) и в полулогарифмических координатах (по оси абсцисс отложен  $\lg t$ ) является прямой линией. По углу наклона этой прямой определяется

гидропроводность пласта  $\frac{kh}{\mu} = \frac{0.1832Q}{i}$ , а по отрезку, отсекаемому на оси

ординат комплекс  $\frac{\kappa}{r_c^2} = \frac{10^{\frac{A}{i}}}{2.246}$ .

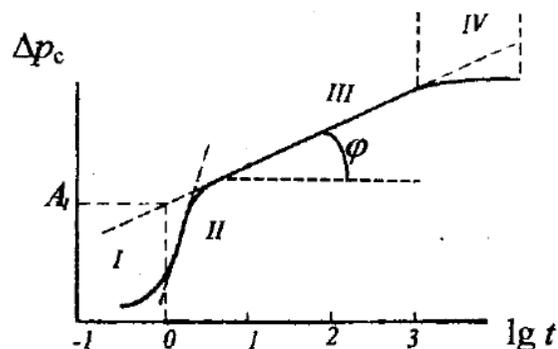


Рис. 9. Режимы фильтрации при пуске скважины с постоянным дебитом: I- начальный, связанный с накоплением жидкости в стволе скважины; II- переходной; III- основной; IV- поздний, обусловленный влиянием границ пласта.

Чаще всего при гидродинамических исследованиях скважины наблюдают восстановление давления после остановки скважины, ранее продолжительное время работавшей с постоянным дебитом. Зарегистрированное изменение давления называют кривой восстановления давления (КВД). Будем считать, что до остановки скважина весьма длительно работала с постоянным дебитом, и вокруг нее в пласте имело

место установившееся распределение пластового давления. Мгновенная остановка скважины в момент времени  $t=0$  имитируется включением фиктивного источника с дебитом  $-Q$ , находящегося в той же точке пласта, что и скважина. По принципу суперпозиции

$$p(r, t) = p_{c.установившееся} + \frac{Q\mu}{2\pi kh} \ln \frac{r}{r_c} + \frac{Q\mu}{4\pi kh} \left[ -Ei\left(-\frac{r^2}{4\kappa t}\right) \right].$$

Подставляя в выражение  $r=r'_c$ , получим зависимость, описывающую восстановление забойного давления после мгновенной остановки скважины

$$\Delta p_c = p_{c.неустановившееся} - p_{c.установившееся} = \frac{Q\mu}{4\pi kh} \left[ -Ei\left(-\frac{r_c'^2}{4\kappa t}\right) \right]. \quad (39)$$

Выражение для изменения забойного давления в этом случае совпадает с формулами для изменения давления после пуска скважины. Обработка КВД и КПД производится по одним и тем же формулам, только разнится точка отсчета изменения давления. Для КПД – это давление в момент пуска скважины в работу, а для КВД – давление в момент остановки скважины.

## 12. Метод последовательной смены стационарных состояний.

Одним из наиболее широко использующихся приближенных методов решения задач теории упругого режима является метод последовательной смены стационарных состояний (ПССС). Метод развит Чарным И.А. [3]. Он основан на предположении, что давление в пласте меняется во времени значительно медленнее, чем по координатам. Поэтому производную по времени в первом приближении можно отбросить, в результате чего для давления получается уравнение Лапласа, описывающее стационарный процесс.

В каждый момент времени весь пласт условно разделяется на две области – возмущенную и невозмущенную. При этом предполагается, что в возмущенной области, начинающейся от стенки скважины, давление распределяется так, как при установившемся режиме. В невозмущенной области давление всюду постоянно и равно начальному. Закон движения подвижной границы, разделяющей возмущенную и невозмущенную области, определяется при помощи уравнения материального баланса.

Пусть в неограниченном горизонтальном пласте в момент времени  $t=0$  пущена добывающая скважина с постоянным дебитом  $Q$ . В соответствии с методом ПССС принимаем, что через время  $t$  после пуска скважины вокруг нее образуется возмущенная область радиусом  $R(t)$ , в которой давление распределено по стационарному закону

$$p(r,t) = p_K - \frac{Q\mu}{2\pi kh} \ln \frac{R(t)}{r}.$$

В остальной части пласта сохраняется постоянное начальное пластовое давление  $p_K$ .

Дебит описывается формулой, аналогичной формуле Дюпюи

$$Q = \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{p_K - p_c}{\ln \frac{R(t)}{r_c}}.$$

Размеры возмущенной области найдем из уравнения материального баланса. Количество добытой жидкости за время  $dt$  равно изменению упругого запаса жидкости в возмущенной зоне пласта за этот же промежуток времени  $Qdt = \beta^* d[V(t)\Delta p]$ . (40)

Объем области  $V(t) = \pi(R^2(t) - r_c^2)h$ . Отклонение давления для возмущенной зоны пласта равно  $\Delta p = p_K - \tilde{p}$ , где  $\tilde{p}$  - средневзвешенное

пластовое давление в установившемся потоке. Оно определяется по формуле

$$\tilde{p} = p_K - \frac{p_K - p_c}{2 \ln \frac{R(t)}{r_c}}, \text{ откуда } \Delta p = p_K - \tilde{p} = \frac{p_K - p_c}{2 \ln \frac{R(t)}{r_c}} = \frac{Q\mu}{4\pi kh}.$$

Подставив полученное выражение в формулу (40) получим

$4\pi kh dt = d(R^2(t) - r_c^2)$ . После интегрирования найдем

$$R(t) = \sqrt{r_c^2 + 4\pi kh t}. \quad (41)$$

Зная радиус границы зон можно определить распределение давления в любой точке пласта.

### 13. Плоскорадиальное вытеснение нефти водой.

Учет преломления линий тока на границе раздела жидкостей составляет главную трудность в точном решении задачи продвижения границы раздела. Линии тока не будут преломляться только в двух случаях – при прямолинейно-параллельном и плоскорадиальном движении границы раздела.

Жидкости считаются несмешивающимися, взаимно нерастворимыми и химически не реагирующими одна с другой. Вытеснение нефти водой предполагается происходящим полностью – так называемое поршневое вытеснение с четкой границей между фазами. Рассмотрим задачу о вытеснении нефти водой в условиях плоскорадиального движения по закону Дарси. Обозначим через  $R_0$ ,  $r_f$  соответственно начальное и текущее положение контура нефтеносности, концентричные скважине и контуру питания; через  $p_e$  и  $p_n$  – давление в любой точке водоносной и нефтеносной области соответственно, через  $p(t)$  – давление на границе раздела жидкостей.

Если изобару, совпадающую в данный момент с контуром нефтеносности, принять за скважину, то распределение давления и скорость

фильтрации в водоносной области можно выразить (как в случае установившейся фильтрации) следующим образом:

$$p_B(r) = p_K - \frac{p_K - p(t)}{\ln \frac{R_K}{r_f}} \ln \frac{R_K}{r},$$

$$w_B = -\frac{k}{\mu_B} \frac{p_K - p(t)}{\ln \frac{R_K}{r_f}} \frac{1}{r},$$

В случае если эту же изобару, совпадающую с  $r_f$  принять за контур питания, по распределению давления в нефтеносной области

$$p_H(r) = p_c + \frac{p(t) - p_c}{\ln \frac{r_f}{r_c}} \ln \frac{r}{r_c},$$

$$w_H = -\frac{k}{\mu_H} \frac{p(t) - p_c}{\ln \frac{r_f}{r_c}} \frac{1}{r},$$

Давление на границе раздела жидкостей найдем из условия равенства скоростей фильтрации нефти и воды на этой границе. В результате получим:

$$p(t) = \frac{p_K \mu_0 \ln \frac{r_f}{r_c} + p_c \ln \frac{R_K}{r_f}}{\ln \frac{R_K}{r_f} + \mu_0 \ln \frac{r_f}{r_c}}, \quad \mu_0 = \frac{\mu_H}{\mu_B}$$

Определим характеристики рассматриваемых потоков нефти и воды. Распределение давления в водоносной и нефтеносной областях имеют

вид

$$p_B = p_K - \frac{\Delta p \ln \frac{R_K}{r}}{\ln \frac{R_K}{r_f} + \mu_0 \ln \frac{r_f}{r_c}}, \quad r_f \leq r \leq R_K;$$

$$p_H = p_c + \frac{\mu_0 \Delta p \ln \frac{r}{r_f}}{\ln \frac{R_K}{r_f} + \mu_0 \ln \frac{r_f}{r_c}}, \quad r_c \leq r \leq r_f,$$

где  $\Delta p = p_K - p_c$ . Из этих формул видно, что закон распределения давления вдоль радиуса-вектора в обеих зонах – логарифмический.

В случае, если знаменатель формулы представить в виде

$$\ln \frac{R_K}{r_f} + \mu_0 \ln \frac{r_f}{r_c} = \ln \left( \frac{r_f^{\mu_0 - 1} R_K}{r_c^{\mu_0}} \right), \quad \mu_0 > 1,$$

То нетрудно заметить, что при  $r_f$ , уменьшающемся во времени (при стягивании контура нефтеносности), этот знаменатель тоже уменьшается. Тогда давление в водоносной части пласта во времени падает, а в нефтеносной – растет (как и при прямолинейно-параллельном потоке).

Градиенты давления в обеих областях течения имеют вид

$$\frac{\partial p_B}{\partial r} = \frac{\Delta p}{\ln \frac{R_K}{r_f} + \mu_0 \ln \frac{r_f}{r_c}} \frac{1}{r},$$

$$\frac{\partial p_H}{\partial r} = \frac{\mu_0 \Delta p}{\ln \frac{R_K}{r_f} + \mu_0 \ln \frac{r_f}{r_c}} \frac{1}{r}.$$

Из полученных формул следует, что градиенты давления во времени растут как в водоносной, так и в нефтеносной областях (так как знаменатель уменьшается). На границе раздела жидкостей градиент давления в

нефтеносной области больше, чем в водоносной в  $\mu_0$  раз. Т.е. на фронте пьезометрическая линия имеет излом.

Скорости фильтрации жидкостей определим из закона Дарси:

$$w_B = \frac{k\Delta p}{\mu_B \left( \ln \frac{R_K}{r_f} + \mu_0 \ln \frac{r_f}{r_c} \right) r} \cdot 1, \quad (47)$$

$$w_H = \frac{k\Delta p}{\mu_B \left( \ln \frac{R_K}{r_f} + \mu_0 \ln \frac{r_f}{r_c} \right) r} \cdot 1.$$

Скорости фильтрации как воды, так и нефти растут во времени.

Дебит скважины найдем, умножив скорость фильтрации на площадь

$$Q = \frac{2\pi h k \Delta p}{\mu_B \left( \ln \frac{R_K}{r_f} + \mu_0 \ln \frac{r_f}{r_c} \right)}. \quad (48)$$

При постоянной депрессии дебит скважины увеличивается во времени, т.е с приближением к ней контура нефтеносности. Такое самопроизвольное увеличение дебита нефти перед прорывом воды в скважину подтверждается и промысловыми наблюдениями.

Закон движения границы раздела жидкостей определим из соотношения между скоростью фильтрации и средней скоростью движения

$$w_f = m v_f = -m \frac{dr_f}{dt}, \quad \text{откуда}$$

$$dt = -\frac{m}{w_f} dr_f = \frac{m\mu_0}{k\Delta p} \left( \ln \frac{R_K}{r_f} + \mu_0 \ln \frac{r_f}{r_c} \right) r_f dr_f.$$

Проинтегрировав это уравнение в пределах от 0 до  $t$  и от  $R_0$  до  $r_f$  получим неявное выражение для закона движение границы раздела:

$$t = \frac{m\mu_B}{2k\Delta p} \left[ \mu_0 \left( R_0^2 \ln \frac{R_0}{r_c} - r_f^2 \ln \frac{r_f}{r_c} \right) + R_0^2 \ln \frac{R_K}{R_0} - r_f^2 \ln \frac{R_K}{r_f} - \frac{1}{2} (\mu_0 - 1) (R_0^2 - r_f^2) \right] \quad (49)$$

Время вытеснения всей нефти водой найдем, подставив в уравнение  $r_f = r_c$ :

$$T = \frac{m\mu_B R_0^2}{2k\Delta p} \left[ \mu_0 \left( \ln \frac{R_0}{r_c} - \frac{1}{2} \right) + \ln \frac{R_K}{R_0} + \frac{1}{2} \right].$$

Это равенство дает оценку времени прорыва воды в скважину.

#### 14. Классификация неньютоновских жидкостей.

Из практики разработки нефтяных месторождений (Башкирии, Татарии и др.) известны факты необычного поведения углеводородов, которые можно объяснить проявлениями неньютоновских свойств. Такие нефти называют аномальными. Особенности фильтрации неньютоновских нефтей связаны с повышенным содержанием высокомолекулярных компонентов – смол, асфальтенов, парафина.

Классификация неньютоновских жидкостей обычно основывается на виде зависимости скорости сдвига  $\dot{\gamma} = dv/dr$  от величины касательного напряжения  $\tau$ . Все неньютоновские жидкости могут быть разбиты на три класса:

1. Системы, для которых скорость сдвига зависит только от величины касательного напряжения, т.е  $dv/dr = f(\tau)$ , - неньютоновские вязкие жидкости.

2. Системы, для которых скорость сдвига зависит как от величины касательного напряжения, так и от времени

$$dv/dr = f(\tau, t).$$

Если с течением времени при заданной величине  $\dot{\gamma}$  напряжение уменьшается, то жидкость называется тиксотропной, а если возрастает – реопектической.

3. Системы, обладающие свойствами как твердого тела, так и жидкости и частично проявляющие упругое восстановление формы после снятия напряжения – вязкоупругие.

*Тиксотропия* - специфическое свойство коагуляционных структур.

Разрушение структуры выражается в разрыве контактов между частицами дисперсной фазы, а ее тиксотропное восстановление - в возобновлении этих контактов вследствие подвижности среды и броуновского движения частиц. Восстановление структуры обычно контролируется по увеличению вязкости системы, поэтому явление тиксотропии можно определить как уменьшение вязкости системы во времени при наложении нагрузки и постепенный рост вязкости после снятия нагрузки.

Ярко выраженной тиксотропией обладают суспензии бентонитовой глины с концентрацией дисперсной фазы более 10%. В спокойном состоянии эта система представляет собой пластическое твердообразное тело, которое не течет под действием силы тяжести. После встряхивания суспензия настолько разжижается, что может легко вытекать из сосуда. Через определенное время выдерживания суспензии в спокойном состоянии она снова превращается в нетекучую структурированную систему.

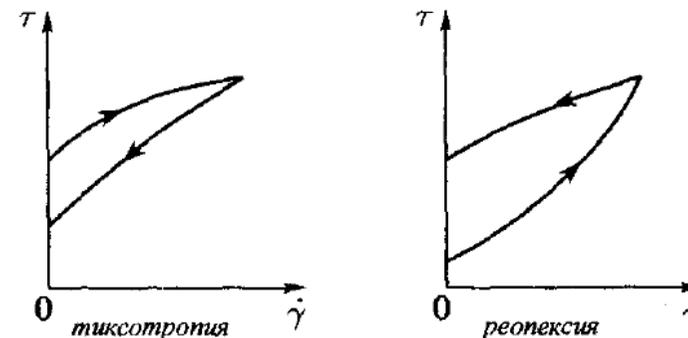


Рис. 10. Зависимость касательных напряжений от скорости сдвига для тиксотропных и реопектических жидкостей.

Неньютоновские вязкие жидкости в свою очередь могут быть разделены на две группы:

а) жидкости, обладающие начальным напряжением сдвига  $\tau_0$ , то есть жидкости, которые начинают течь лишь после того, как касательное напряжение превысит некоторый предел  $\tau_0$ ;

б) жидкости, не обладающие начальным напряжением сдвига.

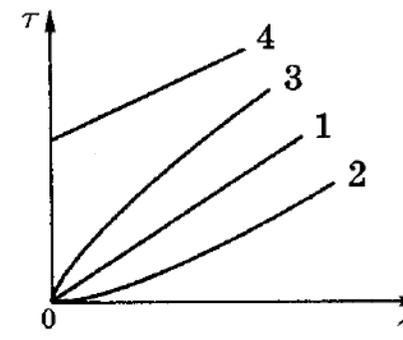


Рис.11. Зависимость касательных напряжений от скорости сдвига для неньютоновских вязких жидкостей.

Для неньютоновских вязких жидкостей можно так же формально ввести понятие вязкости  $\mu_a = \tau/\dot{\gamma}$ . В отличие от ньютоновских жидкостей величина вязкости не константа, а функция касательного напряжения  $\tau$ .

Примером жидкости с начальным напряжением сдвига является вязкопластичная жидкость, или жидкость Бингама-Шведова. Ее реологическое уравнение имеет вид

$$\frac{dv}{dr} = \begin{cases} 0, & \tau \leq \tau_0 \\ \frac{\tau - \tau_0}{\mu}, & \tau \geq \tau_0 \end{cases} \quad (50)$$

где  $\tau_0$  - начальное напряжение сдвига,  $\mu$  - коэффициент пластической вязкости. Модель вязкопластичной жидкости широко используется при описании поведения глинистых растворов, буровых шламов и т.п.

Примером жидкостей, не обладающих начальным напряжением сдвига, могут служить так называемые «степенные жидкости», т.е. для

которых реологическое уравнение имеет вид  $\tau = k \left( \frac{dv}{dr} \right)^n$ . Величина  $k$  -

называется консистентностью, а  $n$  - индексом течения. Для жидкостей с разным индексом течения величина  $k$  имеет разную размерность, откуда следует, что  $k$  не имеет физического смысла. При  $n < 1$  жидкость называется псевдопластичной, при  $n > 1$  - дилатантной. При  $n = 1$  соотношение переходит в закон трения Ньютона, т.е. обычное соотношение для ньютоновской жидкости,  $k$  совпадает с динамическим коэффициентом вязкости.

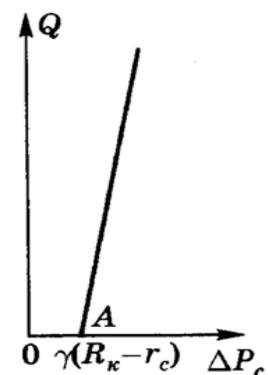


Рис. 12. Индикаторная линия, соответствующая закону фильтрации вязкопластичной жидкости

Важный эффект фильтрации с предельным градиентом давления – возможность образования в пласте застойных зон, где движение нефти отсутствует. Эти зоны образуются в тех участках пласта, где градиент давления меньше предельного.

### 15. Математическая модель двухфазной фильтрации.

В реальных месторождениях происходит совместное течение воды и нефти, представляющих собой обособленные фазы, не смешивающиеся между собой. Фаза – это часть системы, которая является гомогенной (все ее части имеют одинаковые свойства) и отделена от других фаз отчетливыми границами. При совместном движении каждая из жидкостей занимает лишь часть порового пространства. Насыщенность элемента пористой среды данной фазой определяется как доля объема активных пор среды, занятая этой фазой. Сопротивление, испытываемое каждой фазой при совместной фильтрации, отлично от того, которое

было бы при течении только одной жидкости. Закон фильтрации каждой из фаз по аналогии с законом Дарси можно записать[8]

$$w_1 = \frac{k_1^* \Delta p_1}{\mu_1 L}, \quad w_2 = \frac{k_2^* \Delta p_2}{\mu_2 L},$$

где  $w_1, w_2$  – модули векторов скоростей фильтрации фаз,  $\mu_1, \mu_2$  – вязкости жидкостей,  $k_1^*, k_2^*$  – фазовые проницаемости,  $\Delta p_1, \Delta p_2$  – разности давлений в соответствующих фазах. Фазовые проницаемости являются для каждой жидкости проницаемостями в обычном смысле в условиях совместной фильтрации. Эти величины зависят от свойств пористой среды и прежде всего от ее абсолютной проницаемости  $k$ , определяемой по данным о фильтрации однородной жидкости, а также от насыщенности пористой среды каждой фазой  $s_i$ . Справедливо равенство  $s_1 + s_2 = 1$ . Из двух насыщенностей независима только одна. При описании двухфазных течений обычно вместо фазовых проницаемостей вводят безразмерные относительные проницаемости, определяемые из соотношений  $k_1 = k_1^* / k$ ,  $k_2 = k_2^* / k$ . В большинстве опытов показано, что для данной структуры пористой среды относительные проницаемости являются в основном функциями насыщенности. Тогда, закон Дарси для каждой фазы записывается в виде

$$w_1 = k \frac{k_1(s) \Delta p_1}{\mu_1 L}, \quad w_2 = k \frac{k_2(s) \Delta p_2}{\mu_2 L} \quad (51)$$

Здесь и далее  $i=1$  будет относиться к воде,  $2$  – к нефти, введено обозначение  $s=s_1, s_2=1-s_1=1-s$ .

В общем случае давления в фазах не совпадают из-за действия поверхностного натяжения и разница равна капиллярному давлению.

Типичные экспериментальные кривые фазовых проницаемостей приведена на рис.13 (кривая 1 относится к более смачивающей жидкости – воде, 2 – к менее смачивающей – нефти, кривая 1' – относится к случаю, когда первая фаза является газом). Для каждой фазы существует предельная насыщенность ( $s_*$  и  $1-s_*$ ) такая, что при меньших значениях насыщенности эта фаза неподвижна. Движение первой фазы может происходить, если  $s > s_*$ . Для второй фазы связанная насыщенность равна  $1-s_*$  и называется остаточной нефтенасыщенностью. Таким образом, совместное течение двух фаз имеет место лишь в следующем интервале изменения водонасыщенности:  $s_* \leq s \leq 1-s_*$ .

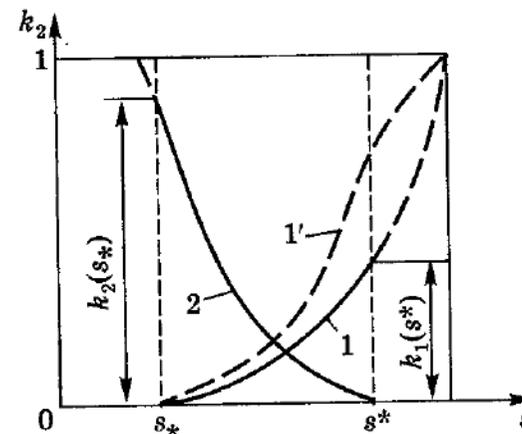


Рис. 13. Кривые зависимостей относительных фазовых проницаемостей от насыщенности.

Сумма относительных проницаемостей для каждого фиксированного значения  $s$  меньше 1:  $k_1(s) + k_2(s) < 1, 0 < s < 1$ .

Графики относительных проницаемостей имеют асимметричный характер. Относительная проницаемость смачивающей фазы при  $s=s_*$  имеет значение меньше 1, тогда как величина  $k_2(s)$  при  $s=1-s_*$  близка к 1.

Это означает, что присутствие связанной смачивающей фазы мало влияет на течение несмачивающей жидкости, тогда как присутствие остаточной несмачивающей фазы значительно «стесняет» движение смачивающей фазы.

Уравнения неразрывности для каждой из фаз имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(m\rho_1^0 s) + \operatorname{div}(\rho_1^0 \bar{w}_1) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(m\rho_2^0(1-s)) + \operatorname{div}(\rho_2^0 \bar{w}_2) &= 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Если жидкость и пористую среду можно предполагать несжимаемыми, то вместо уравнений (52) имеем соотношения

$$\begin{aligned} m \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{w}_1) &= 0, \\ -m \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{w}_2) &= 0. \end{aligned} \quad (53)$$

Для каждой фазы считается справедливым обобщенный закон Дарси:

$$\bar{w}_i = k \frac{k_i(s)}{\mu_i} (\nabla p_i - \rho_i^0 \bar{g}), \quad i = 1, 2,$$

где  $\bar{g}$  - вектор ускорения свободного падения. При изотермических условиях плотность и коэффициент вязкости каждой из фаз определяются давлением в данной фазе:

$$\rho_i^0 = \rho_i^0(p_i), \quad \mu_i = \mu_i(p_i), \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, получена замкнутая система уравнений для определения всех неизвестных функций.

## 16. Прямолинейно-параллельное вытеснение.

Пусть совместное течение двух жидкостей происходит в направлении оси  $x$ , наклоненной к горизонту под углом  $\alpha$ . Тогда уравнения неразрывности для фаз имеют вид

$$-m \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0; \quad m \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial w_2}{\partial x} = 0, \quad (54)$$

а обобщенный закон Дарси сводится к соотношениям:

$$w_i = -M_i \left( \frac{\partial p_i}{\partial x} + \rho_i^0 g \sin \alpha \right), \quad M_i = \frac{k}{\mu_i} k_i(s), \quad i = 1, 2.$$

Складывая почленно уравнения, получим

$$-w(t) = -(w_1 + w_2) = M_1 \frac{\partial p_1}{\partial x} + M_2 \frac{\partial p_2}{\partial x} + (M_1 \rho_1^0 + M_2 \rho_2^0) g \sin \alpha.$$

Исключим градиент давления  $\partial p_2 / \partial x$  при помощи равенства

$$p_2 - p_1 = p_K, \quad \text{где } p_K \text{ - капиллярное давление,}$$

продифференцированного по  $x$ ,

$$\frac{\partial p_2}{\partial x} = \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_K(s)}{\partial x} = \frac{\partial p_1}{\partial x} + p_K' \frac{\partial s}{\partial x}, \quad p_K' = \frac{dp_K}{ds},$$

получим после преобразований

$$-\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{w(t) + M_2 p_K' \frac{\partial s}{\partial x} + (M_1 \rho_1^0 + M_2 \rho_2^0) g \sin \alpha}{M_1 + M_2}.$$

Подставив это равенство в уравнение фильтрации первой фазы, получим

$$w_1 = \left[ w(t) + M_2 \left( p'_k \frac{\partial s}{\partial x} + \Delta \rho g \sin \alpha \right) \right] f(s), \quad (55)$$

где  $\Delta \rho = \rho_2^0 - \rho_1^0$ ,  $f(s)$  - функция Бакли-Левретта, определяемая равенством:

$$f(s) = \frac{k_1(s)}{k_1(s) + \mu_0 k_2(s)}, \quad \mu_0 = \mu_1 / \mu_2. \quad (56)$$

Функция  $f(s)$  играет важную роль при гидродинамических расчетах двухфазных фильтрационных течений.

Используя теперь выражение для скорости (55) и уравнение неразрывности для первой фазы, получим уравнение для определения насыщенности

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + w(t) f'(s) \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ M_2 \left( p'_k \frac{\partial s}{\partial x} + \Delta \rho g \sin \alpha \right) f(s) \right] = 0.$$

Это уравнение известно как уравнение Рапопорта-Лиса. Будем считать для простоты, что суммарная скорость фильтрации не зависит от времени, введя безразмерные переменные  $\xi = x/L$ ,  $\tau = wt/(mL)$  и используя выражения для капиллярного давления, приведем уравнение к безразмерной форме:

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} + \left[ f'(s) + N_g G'(s) \right] \frac{\partial s}{\partial \xi} + N_c \frac{\partial}{\partial \xi} C(s) \frac{\partial s}{\partial \xi} = 0. \quad (57)$$

$$G(s) = k_2(s) f(s), \quad C(s) = G(s) J'(s).$$

$$\text{Здесь } N_g = \frac{k \Delta \rho g \sin \alpha}{\mu_2 w}, \quad N_c = \frac{\alpha_n \cos \theta \sqrt{mk}}{\mu_2 w L} - \text{безразмерные}$$

параметры, характеризующие отношение силы тяжести и капиллярных сил к силам вязкости соответственно.

Силой тяжести можно пренебречь, если параметр  $N_g$  мал по сравнению с единицей. Для оценки влияния капиллярного давления необходимо учесть, что в задачах нефтегазовой подземной гидродинамики размер области течения достигает сотен метров, перепад давления несколько десятков или единиц МПа. Если параметр  $N_c \ll 1$ , то капиллярными силами можно пренебречь, такое приближение называется крупномасштабным.

Для иллюстрации сделаем оценку. Межфазное натяжение на границе большинства углеводородных жидкостей и газов с водой находится в пределах от 0.01 до 0.005 Н/м; скорость фильтрации составляет  $10^{-6}$ - $10^{-5}$  м/с. Положив  $\cos \theta \approx 1$ ,  $m=0.1$ ,  $k=10^{-13}$ ,  $\mu_2=3\text{сП}=3 \cdot 10^{-3}$  Па\*с,  $w=10^{-5}$  м/с,  $L=10^3$  м, найдем оценку  $N_c \approx 10^{-4}$ , которая дает характерный порядок малости этой величины.

## 17. Классическая задача Бакли-Левретта.

Задачи двухфазной фильтрации без учета капиллярных сил известны как задачи Бакли-Левретта. Если пренебречь влиянием силы тяжести, то процесс вытеснения допускает простое математическое описание. Для обоих случаев одномерного потока (прямолинейно-параллельного и плоскорадиального) течение описывается однотипным уравнением для насыщенности вытесняющей фазы:

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} + f'(s) \frac{\partial s}{\partial \xi} = 0. \quad (58)$$

В рассматриваемом случае функция Бакли-Левретта имеет простой физический смысл. При  $\Delta \rho=0$  и  $p'_k(s)=0$  скорость фильтрации вытесняющей фазы в случае прямолинейно-параллельного и

радиального вытеснения, соответственно

$$w_1 = f(s)w(t), \quad w_1 = f(s) \frac{q(t)}{r}.$$

Отсюда следует, что  $f(s)$  равна объемной доле вытесняющей жидкости (воды) в суммарном потоке двух фаз. Функция Бакли-Левретта определяет полноту вытеснения и характер распределения насыщенности по пласту. Задачи повышения нефте- и газоконденсатотдачи в значительной степени сводятся к применению таких технологий воздействия на пласт, которые в конечном счете изменяют вид функции  $f(s)$  в направлении увеличения полноты вытеснения.

Функция  $f(s)$  полностью определяется относительными фазовыми проницаемостями и отношением вязкости фаз. Типичные графики  $f(s)$  и ее производной приведены на рис. 14. С ростом водонасыщенности  $f(s)$  монотонно возрастает от 0 до 1. Характерная особенность графика  $f(s)$  – наличие точки перегиба, участков выпуклости и вогнутости.

В процессе нагнетания воды в пласт ее насыщенность будет меняться со временем вдоль направления движения  $x$ . Полный

$$\text{дифференциал насыщенности равен } ds = \frac{\partial s}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial s}{\partial \tau} d\tau.$$

Линии, вдоль которых насыщенность принимает заданное постоянное значение, называются изосатами. Вдоль них  $s(\xi, \tau) = \text{const}$  и

$$\frac{\partial s}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial s}{\partial \tau} d\tau = 0. \text{ Таким образом, линия распространения заданной}$$

насыщенности получается совместным решением следующих двух уравнений:

$$\frac{\partial s}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial s}{\partial \tau} d\tau = 0 \text{ и } \frac{\partial s}{\partial \tau} + f'(s) \frac{\partial s}{\partial \xi} = 0.$$

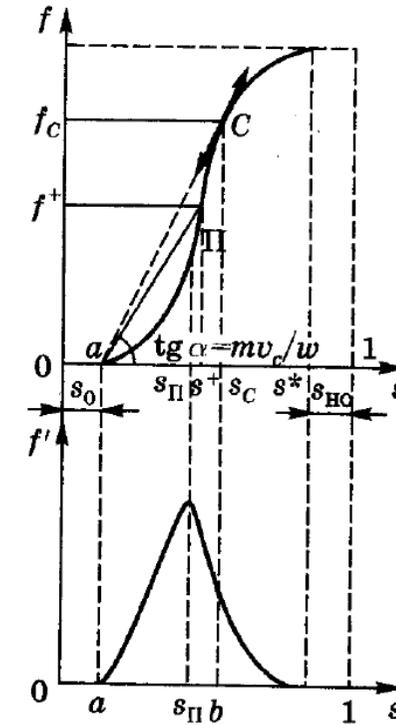


Рис. 14. Зависимость объемной доли вытесняющей фазы(воды) в потоке (а) и ее производной (б) от насыщенности

Чтобы система однородных, линейных относительно  $d\xi/d\tau$  уравнений имела отличное от нуля решение, необходимо, чтобы ее определитель был равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} 1 & f'(s) \\ d\tau & d\xi \end{vmatrix} = 0, \text{ откуда находим } \frac{d\xi}{d\tau} = f'(s).$$

Напомним, что производная  $d\xi/d\tau$  вычисляется при постоянном значении  $s$ . Полученное уравнение можно проинтерпретировать следующим образом: точка с постоянной насыщенностью  $s$  (на кривой  $s(\xi)$ ) движется с постоянной скоростью, являющейся функцией самой насыщенности). Проинтегрировав уравнение можно найти положение  $\xi$  заданного значения насыщенности как функцию безразмерного времени:

$$\xi(s) = f'(s)\tau + \xi_0, \quad (59)$$

где  $\xi_0$  – значение координаты с начальной водонасыщенностью  $s_0$  при  $\tau=0$ .

Будем предполагать, что первоначально пласт был насыщен нефтью и содержал лишь связанную (неподвижную) воду, нагнетание начинается с границы  $\xi=0$ , т.е.  $\xi_0=0$ . При  $\tau>0$  все точки кривой  $s(\xi)$ , для которых насыщенность лежит в интервале  $s_* \leq s \leq s^*$  начнут перемещаться со скоростями, пропорциональными  $f'(s)$ . Кривая  $f'(s)$  – не монотонная функция, а имеет максимум в точке П. Это означает, что некоторые промежуточные значения насыщенности будут перемещаться быстрее, чем значения насыщенности большие или меньшие. И спустя некоторое время форма профиля насыщенности будет иметь вид, подобный графику рис. 15. Из рисунка видно, что для любого значения координаты насыщенность становится неоднозначной. Такое положение физически невозможно, и начиная с этого момента времени, невозможно непосредственное применение уравнения (59).

Введение скачка (или фронта) насыщенности позволяет устранить многозначность решения (прямая АВ). Положение скачка насыщенности определяется из условия материального баланса на скачке, так что площади сегментов, заштрихованных на рис. 15 равны.

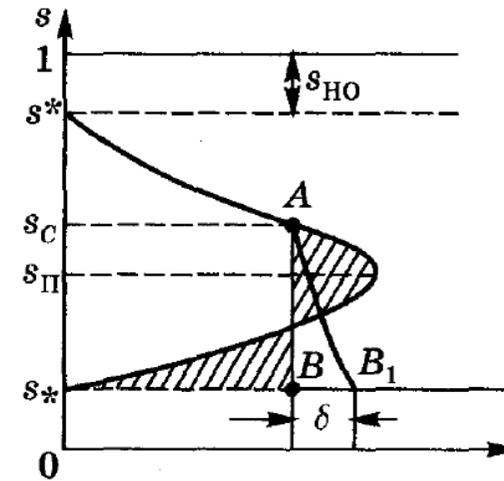


Рис. 15. Схематичный профиль насыщенности.

В действительности введенный математический скачок насыщенности места не имеет, а возникает вследствие пренебрежения капиллярными силами. На самом деле существует некоторая конечная зона длиной  $\delta$ , в которой насыщенность резко падает от значения  $s_c$  до  $s_*$ .

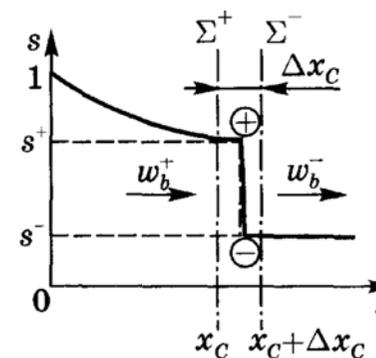


Рис. 16. Схема для составления материального баланса на скачке насыщенности.

Из условия сохранения массы каждой из фаз при прохождении через поверхность фронта можно получить скорость скачка в размерных

$$\text{величинах: } \frac{dx_c}{dt} = v_c = \frac{w_B^+ - w_B^-}{m(s^+ - s^-)} = \frac{w}{m} \frac{f^+ - f^-}{s^+ - s^-}. \quad (60)$$

Здесь и далее индексом «с» - обозначены величины, относящиеся к фронту (скачку) насыщенности, «+»- значения за фронтом, «-» - значения перед фронтом. Равенство (60) имеет простой геометрический смысл: скорость скачка пропорциональна тангенсу угла наклона к оси  $s$  секущей, соединяющей точки кривой  $f(s)$ , имеющие абсциссы  $s^+$  и  $s^-$  (см. рис.14) с коэффициентом пропорциональности  $w/m$ , в то время как скорость распространения насыщенности  $s_c$  на скачке, в общем случае, определяется тангенсом угла наклона касательной  $aC$  к этой же кривой. В безразмерных переменных условие на скачке насыщенности

$$\text{принимает вид: } D = \frac{d\xi}{d\tau} = \frac{f(s^+) - f(s^-)}{s^+ - s^-}.$$

Если насыщенности по обе стороны фронта постоянны (в нашем случае  $s^- = s_0$ ,  $s^+ = s_c$ ), то уравнение можно проинтегрировать и найти

$$\text{положение фронта как функцию времени } \xi_c = \frac{f^+ - f^-}{s^+ - s^-} \tau + \xi_{c0},$$

где  $\xi_{c0}$ - положение скачка в начальный момент времени (в нашем случае при постоянном начальном распределении насыщенности  $\xi_{c0}=0$ ).

Для фронтальной насыщенности, как и для любой другой,

$$\text{выполняется равенство } \frac{d\xi}{d\tau} = f'(s). \text{ Кроме того, скорость скачка}$$

определяется равенством (60), в котором  $s^- = s_0$ ,  $s^+ = s_c$ . Приравняв правые

части, получим уравнение для определения фронтальной насыщенности  $s_c$ :

$$f'(s_c) = \frac{f(s_c) - f(s_0)}{s_c - s_0}. \quad (61)$$

Заметим, что  $f(s_0)=0$  при  $0 \leq s \leq s^*$ .

Уравнение (61) означает, что в задаче Бакли-Леверетта скорость распространения скачка  $D$  равна скорости распространения фронтальной насыщенности.

Это уравнение имеет простую геометрическую интерпретацию (см. рис.14): оно представляет собой уравнение касательной, проведенной из точки  $(s_0, f(s_0))$  к кривой  $f(s)$ , где  $s_c$ - абсцисса точки касания. Это дает простой графический способ определения фронтальной насыщенности по известной функции Бакли-Леверетта.

Способ графического построения профиля насыщенности состоит в следующем:

- 1) в соответствии с данными о фазовых проницаемостях жидкостей строится кривая Бакли-Леверетта  $f(s)$ ;
- 2) из точки  $a$  на кривой  $f(s)$ , соответствующей начальной водонасыщенности  $s_0$  в пласте ( $0 \leq s_0 \leq s^*$ ), проводится касательная к  $f(s)$ ;
- 3) насыщенность в точке касания  $s_c$ , есть насыщенность, которая устанавливается в пласте непосредственно за фронтом (т.е.  $s^+$ );
- 4) отрезок  $ab$  на рис.14 представляет величину скачка насыщенности  $s_c - s_0$ , которая не меняется со временем (стационарный скачок);
- 5) скорость перемещения постоянных насыщенностей, больших  $s_c$ , пропорциональна наклону касательных в этой точке.

При численных расчетах для определения насыщенности на скачке вместо решения уравнения удобно использовать эквивалентный способ. За фронтальную насыщенность следует принять те значения  $s$ , которые обеспечивают максимум дроби:  $\frac{f(s) - f(s_0)}{s - s_0} = \max$ . Это условие

означает, что на скачке реализуется то значение насыщенности, которое обеспечивает ей наибольшую скорость.

Рассмотренная классическая задача Бакли-Левверетта соответствует случаю кусочно-постоянных начальных данных и слабо-обводненного пласта. Решение задачи о вытеснении нефти водой из слабо обводненного пласта имеет вид

$$\begin{aligned} s &= s^* && \text{при } \xi = 0, \tau = 0, \\ f(s) &= d\xi/d\tau && \text{при } 0 < \xi \leq \xi_c, \\ s &= s_0 && \text{при } \xi_c < \xi \leq 1. \end{aligned}$$

Распределение насыщенности в период времени, когда фронт не достиг добывающей галереи (скважины) показано на рис. 17.

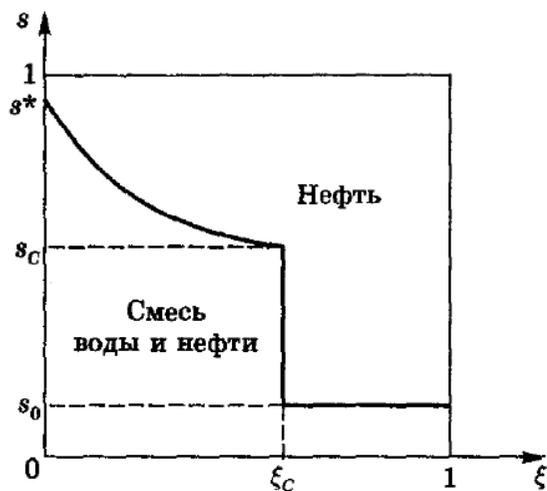


Рис. 17. Кривая распределения водонасыщенности до прорыва воды в галерею.

Заметим, что если пласт сильно обводнен, то разрывное решение не имеет места. В этом случае задача имеет непрерывное решение.

Решением Бакли-Левверетта широко пользуются в нефтяной промышленности для расчета эффективных фильтрационных характеристик вытеснения нефти водой. Например, если рассматривается прямолинейно-параллельное вытеснение, начальная водонасыщенность мала  $0 \leq s_0 \leq s^*$ , так что  $f(s_0) = 0$ , через сечение  $x=0$  закачивается вода с постоянным расходом (следовательно, и с постоянной скоростью), то  $x(s) = \frac{W}{m} f'(s)t$ .

Положение фронта вытеснения в любой момент времени  $t$  определяется как  $x_c = \frac{W}{m} f'(s_c)t$ . Фронтальную насыщенность  $s_c$  находим из (61) при  $f(s_0) = 0$ :

$$(s_c - s_0) f'(s_c) = f(s_c). \quad (62)$$



где было учтено, что  $f'(s^*)=0$  и  $f(s^*)=1$ . Окончательно, заменив  $x_c$  соотношением  $x_c = \frac{W}{m} f'(s_c)t$ , найдем выражение для средней водонасыщенности в зоне смеси:

$$\bar{s} = s_0 + \frac{1}{f'(s_c)}. \quad (65)$$

Равенство имеет простой геометрический смысл: средняя насыщенность есть абсцисса точки пересечения касательной к кривой  $f(s)$ , с прямой  $f=1$ .

Для известных экспериментальных кривых относительных фазовых проницаемостей средняя насыщенность обычно значительно меньше единицы. Поэтому в процессах вытеснения нефти водой для достаточно полного извлечения нефти из пласта на единицу объема добываемой нефти нужно затратить в несколько раз больше объемов воды.

## 20. Расчет коэффициента нефтеотдачи

Другая важная характеристика вытеснения – коэффициент нефтеотдачи. На первой стадии вытеснения коэффициент безводной нефтеотдачи определяется как отношение вытесненного объема нефти к общему объему пор, занятых нефтью до начала вытеснения. Поскольку в силу предположения о несжимаемости фаз, объем закачанной воды равен объему вытесненной нефти, то

$$\eta_H = s_0 + \frac{m \varpi \int_0^{x_c} [s(x,t) - s_0] dx}{m \varpi x_c (1 - s_0)}. \quad (66)$$

Откуда после вычислений, аналогичных приведенным в п.19, получим

$$\eta_H = [(1 - s_0) f'(s_c)]^{-1}. \quad (67)$$

Используя выражение для средней водонасыщенности в безводный период, можно записать  $\eta_H = \frac{\bar{s} - s_0}{1 - s_0}$ . (68)

Для рассмотренных модельных относительных фазовых проницаемостей при  $s_0=0$  коэффициент безводной нефтеотдачи равен

$$\eta_H = 2\sqrt{\mu_0} (\sqrt{\mu_0 + 1} - \sqrt{\mu_0}), \quad \mu_0 = \mu_B / \mu_H. \quad (69)$$

Откуда следует, что коэффициент безводной нефтеотдачи увеличивается при увеличении вязкости вытесняющей фазы  $\mu_B$  или при уменьшении вязкости вытесняемой фазы  $\mu_H$ .

После прорыва воды через добывающую галерею вводят понятие коэффициента конечной нефтеотдачи

$$\eta_H^0 = \frac{\bar{s}^0 - s_0}{1 - s_0}, \quad \bar{s}^0 = s_0 + \frac{1 - f(s_L)}{f'(s_L)}, \quad (70)$$

где  $L$  – расстояние от нагнетательной галереи до добывающей.

## Литература

1. Басниев К.С.. Подземная гидромеханика/ К.С. Басниев, Н.М. Дмитриев, Р.Д.Каневская, В.М. Максимов. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 496 с.
2. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде.— Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 628 с.
3. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика/ И.А. Чарный. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. – 436 с.
4. Щелкачев В.Н. Подземная гидравлика/В.Н. Щелкачев, Г.Б.Лапук. – М.-Ижевск: РХД, 2001. – 736 с.
5. Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Розенберг Б.Г. Нефтегазовая гидромеханика: Учебное пособие для вузов. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 544с.
6. Щелкачев В.Н. Избранные труды/В.Н. Щелкачев.-М.: Недра, 1990. – т.1-2.
7. Молокович Ю.М., Пьезометрия окрестности скважин. Теоретические основы / Ю.М Молокович., А.И. Марков,,Г.Г. Куштанова. А.А. Давлетшин. – Казань: изд-во «ДАС», 2000. –203 с.
8. Баренблатт Г.И. Движение жидкостей и газов в природных пластах/ Г.И. Баренблатт, В.М. Ентов, В.М. Рыжик. –М.: Недра, 1984. – 201 с.